

**DES TOPOLOGIES DANS  
LES GROUPES STABLES**

M. JUNKER

REPORT No. 21, 2000/2001

ISSN 1103-467X

ISRN IML-R- -21-00/01- -SE



**INSTITUT MITTAG-LEFFLER**  
THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES

# Des topologies dans les groupes stables

Markus Junker  
Universität Freiburg &  
Mittag-Leffler-Institut, Djursholm

Décembre 2000

## Abstract

This paper is a collection of results about topologies in stable groups. The first section defines and studies variants of the Sroure topology. The second section examines the behaviour of terms in these topologies and particularly the question of generic equations. The last section is devoted to the notion of completeness and possible applications to the bad group problem.

Ces notes rassemblent des résultats partiels que j'ai obtenus en essayant de prouver que les mauvais groupes n'existent pas. Mon approche essaie de généraliser la preuve pour les groupes algébriques (ou les groupes de Zariski) en utilisant une variante de la topologie de Sroure au lieu d'une topologie de Zariski (abstraite). Il semble qu'aujourd'hui que ces techniques ne peuvent pas s'appliquer à tous les groupes de rang de Morley fini ; toutefois on pourrait espérer des résultats sous des conditions raisonnables (comme être fortement équationnel). J'espère que l'approche aura son intérêt.

Soit  $\mathcal{L}$  un langage contenant un symbol binaire  $\mu$  et  $T$  une  $\mathcal{L}$ -théorie complète dans laquelle  $\mu$  est une loi de groupe.  $\mathfrak{G}$  dénotera un modèle saturé de  $T$  suffisamment grand. L'élément neutre est désigné par  $e$  et le passage à l'inverse  $x \mapsto x^{-1}$  par  $\iota$  ; puisque les deux sans définissables sans paramètres (et essentiellement sans quanteurs), on peut aussi bien supposer qu'ils se trouvent dans le langage.  $G^n$  est toujours le produit cartésien de  $n$  copies de  $G$ .

Pour beaucoup des raisonnements présentés ici, il n'est pas nécessaire de travailler dans un groupe. Pour souligner cela,  $\mathfrak{M}$  désignera parfois un modèle saturé d'un langage  $\mathcal{L}$  quelconque.

Si  $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{n \in \omega} \mathfrak{P}(G^n)$ , alors  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A} \cap \mathfrak{P}(G^n)$ . On supposera toujours  $G^m \cap G^n = \emptyset$  pour  $m \neq n$  (et donc  $\mathfrak{P}(G^m) \cap \mathfrak{P}(G^n) = \{\emptyset\}$ ).

$\tau(\cdot)$  désigne toujours une topologie ou une famille de topologies ;  $\mathcal{F}(\cdot)$  en est l'ensemble des fermés.

## 1 Une notion générale d'ensemble fermé

### 1.1 Clôture par suite d'indiscernables

Soit  $\Sigma$  un groupe de bijections de  $G^n$ . On considérait par exemple le groupe  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$  avec son action diagonale.

**Définition 1.1** *Une suite  $\Sigma$ -indiscernable est une suite infinie  $(\bar{x}_i)_{i \in I}$  de  $n$ -uplets telle que pour tout  $k$  et tous  $k$ -uplets  $i_1 < \dots < i_k$  et  $j_1 < \dots < j_k$  extraits de  $I$ , il existe  $\sigma \in \Sigma$  envoyant  $(\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_k})$  sur  $(\bar{x}_{j_1}, \dots, \bar{x}_{j_k})$ .*

*Une partie  $X \subseteq G^n$  est dit clos à gauche (clos à droite, clos respectivement) par suites  $\Sigma$ -indiscernable si chaque fois que  $\bar{x}_\infty \widehat{(\bar{x}_i)_{i \in \omega}}$  (ou  $(\bar{x}_i)_{i \in \omega} \widehat{\bar{x}_\infty}$ , ou l'un ou l'autre, respectivement) est une suite  $\Sigma$ -indiscernable avec  $\bar{x}_i \in X$  pour  $i \in \omega$ , alors  $\bar{x}_\infty \in X$ .*

Les ensembles clos (à gauche, à droite) par suites  $\Sigma$ -indiscernable sont les fermés d'une topologie sur  $G^n$ , appelée la  $\Sigma$ -topologie (à gauche, à droite respectivement). Notons  $\tau_n(\Sigma)$  la  $\Sigma$ -topologie et  $\mathcal{F}_n(\Sigma)$  la famille des  $\Sigma$ -fermés.

Si  $\Sigma \leq \Sigma'$  en tant que groupes de permutations sur  $G^n$ , alors la  $\Sigma$ -topologie est plus fine que la  $\Sigma'$ -topologie, i.e.  $\tau_n(\Sigma') \subseteq \tau_n(\Sigma)$ .

Un ensemble clos par suites  $\Sigma$ -indiscernable contient tous les éléments de n'importe quelle suite  $\Sigma$ -indiscernable dès qu'il en contient une infinité : tout élément de la suite apparaît au début ou à la fin d'une sous-suite comme dans la définition.

Un  $\Sigma$ -image d'une suite  $\Sigma$ -indiscernable est encore une suite  $\Sigma$ -indiscernable ; donc  $X$  est clos par suites  $\Sigma$ -indiscernable ssi il existe un  $\Sigma$ -image de  $X$  clos par suites  $\Sigma$ -indiscernable ssi tout  $\Sigma$ -image de  $X$  est clos par suites  $\Sigma$ -indiscernable.

**Définition 1.2** L'action de  $\Sigma$  sur  $G^n$  est définissable s'il existe un énoncé du premier ordre dans un langage augmenté par  $n$  symboles de fonctions  $n$ -aires  $f_i$  qui décrit si  $(f_1^{\mathfrak{G}}, \dots, f_n^{\mathfrak{G}}) \in \Sigma$ .

Dans le cas d'une action définissable, on peut raisonner avec le théorème de compacité : par exemple, un ensemble est clos à gauche si et seulement s'il est clos à droite : on peut d'abord renverser l'ordre de la suite et puis utiliser la compacité pour changer le type d'ordre des autres éléments de  $\omega^*$  en  $\omega$ .

### Exemple 1.3

- (1) Pour un groupe  $\Sigma$  fini, les seules suites  $\Sigma$ -indiscernables sont les suites constantes ; la  $\Sigma$ -topologie est donc la topologie discrète sur  $G^n$ .
- (2) À l'opposé, pour un groupe  $\Sigma$  qui est hautement transitif sur  $G^n$ , comme le groupe des bijections définissables, toute suite respectant le type d'égalité devient  $\Sigma$ -indiscernable. Les fermés de la  $\Sigma$ -topologie sont donc les ensembles définissable par une formule positive avec paramètres, dans le pure langage d'égalité (les « fermés triviaux »).
- (3) Les  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$ -fermés ont été appelés « indiscernible closed » dans [JL]. Un  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$ -fermé définissable est la même chose qu'un fermé dans le sens de Srour [PS]. La topologie de Srour est celle engendrée par les  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$ -fermés définissables (ou encore la  $\text{Aut}(\mathfrak{G})^{\text{df}}$ -topologie). Cette topologie est non-triviale et mal connue dans la plupart des structures classiques.  
Dans le cas des corps algébriquement clos, elle est comprise entre la topologie de Zariski et la topologie constructible. Elle s'est toutefois avérée trop fine pour les applications géométrique, par exemple parce que tout ensemble  $\emptyset$ -définissable est un fermé de Srour.
- (4) Soit  $T_n$  le groupe de permutations sur  $G^n$  engendré par les translations à gauche et les translations à droite. De nouveau, seulement les suites constantes sont  $T_n$ -indiscernables ; la topologie associée est discrète.
- (5) Dénotons par  $\text{Hol}_n(\mathfrak{G})$  le groupe de permutations sur  $G^n$  engendré par  $T_n$  et l'action diagonale de  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$ . Si  $\mathfrak{G}$  est un pure groupe, alors  $\text{Hol}_1(\mathfrak{G}) \cong \text{Aut}(\mathfrak{G}) \rtimes G$  ; ceci n'est pas vrai pour  $n > 1$  puisque les conjugaisons dans  $G^n$  ne sont plus des automorphismes. En général,  $\text{Hol}_n(\mathfrak{G})$  est isomorphe à  $G \rtimes \text{Aut}(\mathfrak{G}) \rtimes G$  quotienté par  $\text{Inn}(\mathfrak{G})$  ; en particulier son action est définissable.

Dans les groupes algébriques, la  $\text{Hol}_n$ -topologie est strictement comprise entre la topologie de Zariski et la topologie de Srour.

On s'intéressera plus particulièrement aux ensembles type-définissables. Il n'est pas clair si les  $\Sigma$ -fermés type-définissables donnent une topologie, c.-à-d. si une intersection quelconque de  $\Sigma$ -fermés type-définissables est encore type-définissable. Cela marche bien si l'on se restreint aux ensembles type-définissable au-dessus d'un ensemble de paramètres  $A$ . Toutefois, si  $X$  est type-définissable au-dessus de  $A \subseteq B$ , alors son adhérence dans la  $\Sigma_B$ -topologie est type-définissable au-dessus de  $B$  et  $A$ -invariant, donc type-définissable au-dessus de  $A$ . On a donc une notion de  $\Sigma$ -clôture type-définissable (cf. [JL]). Soit  $\mathcal{F}_n^{\text{tp}}(\Sigma)$  la famille des  $\Sigma$ -fermés type-définissables.

Finalement on peut considérer la topologie engendrée par les  $\Sigma$ -fermés définissables, qu'on appellera la  $\Sigma_n^{\text{df}}$ -topologie  $\tau_n^{\text{df}}(\Sigma)$ . Comme d'habitude,  $\mathcal{F}_n^{\text{df}}(\Sigma)$  dénote la famille des  $\Sigma_{\text{df}}$ -fermés.

Dans le cas de la topologie de Srour, et donc de toute sous-topologie (par exemple si  $\text{Aut}(\mathfrak{G}) \leq \Sigma$ ), tout  $\Sigma_n^{\text{df}}$ -fermé est type-définissable, voir [JL]. On a donc

$$\mathcal{F}_n(\Sigma) \cap \text{Def}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathcal{F}_n^{\text{df}}(\Sigma) \subseteq \mathcal{F}_n^{\text{tp}}(\Sigma) \subseteq \mathcal{F}_n(\Sigma)$$

Le but de toutes ces considérations serait de trouver une topologie qui ressemble à la topologie de Zariski. En particulier, on aimerait avoir les propriétés suivantes :

- une topologie invariante qui ne dépend que peu du langage (en particulier invariante quand on nomme des constantes) ;
- les termes définissent des applications continues ;
- les sous-groupes définissables sont fermés ;
- il existe une notion de complétude intéressante.

De dernier point reste un peu vague pour l'instant. On pourrait aussi demander que la topologie reconnait l'indépendance (ce qui est vérifié dans un groupe algébrique pour toute topologie comprise entre celle de Zariski et celle de Srour).

Les exemples montrent qu'il faut chercher des groupes contenant  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$ , mais évitant des groupes trop transitifs comme celui des bijections définissables. Un tel groupe est par exemple  $\text{Aut}_{\tau}(\mathfrak{G})$ , le groupe des bijections de  $G$  conservant tous les ensembles  $\emptyset$ -définissables. On peut le voir comme un produit semi-direct de  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$  et de  $\ll \text{Aut}_{\tau}(\mathcal{L}) \gg$ . Son action n'est pas forcément définissable.

## 1.2 Rapports avec la DIC

Un  $\Sigma$ -image de  $X \subseteq G^n$  est un ensemble de la forme  $\{(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) \mid (x_1, \dots, x_n) \in X\}$  pour un  $\sigma \in \Sigma$ .

**Définition 1.4** *Un ensemble  $X \subseteq G^n$  satisfait à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC si toute intersection de  $\Sigma$ -images de  $X$  en est une sous-intersection de cardinalité plus petit que  $\kappa$ .*

$X$  est lui-même  $\Sigma$ -image de tous ses  $\Sigma$ -images ; donc  $X$  satisfait à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC ssi il existe un  $\Sigma$ -image de  $X$  satisfaisant à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC ssi tout  $\Sigma$ -image de  $X$  satisfait à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC.

Si  $\kappa$  est régulier, alors  $X$  ne satisfait pas à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC si et seulement s'il existe *une suite de  $\Sigma$ -images  $\kappa$  fois descendante*, i.e. des  $\sigma_i \in \Sigma$  pour  $i \in \kappa$  tels que  $\sigma_{\alpha}[X] \not\subseteq \bigcap_{i < \alpha} \sigma_i[X]$  pour tout  $\alpha < \kappa$ .

### Remarque 1.5

- Soit  $\kappa \leq \kappa'$ , et  $\Sigma \leq \Sigma'$  en tant que groupes de permutations sur  $G^n$ . Si  $X$  satisfait à la  $\Sigma'$ - $\kappa$ -DIC, alors aussi à la  $\Sigma$ - $\kappa'$ -DIC.
- Si tous les  $X_i$  satisfont à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC, alors  $\bigcap_{i \in I} X_i$  satisfait à la  $\Sigma$ - $\max\{\kappa, |I|^+\}$ -DIC.
- Si  $X_1, \dots, X_n$  satisfont à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC, alors  $X_1 \cup \dots \cup X_n$  aussi.

[La preuve marche comme dans [PS] pour les fermés de Srour : soit une suite  $\sigma_i[X_1 \cup \dots \cup X_n]$   $\kappa$ -fois descendante. À chaque étape c'est à cause d'un des  $\sigma_i[X_1], \dots, \sigma_i[X_n]$ . Choisissons  $j$  et une sous-suite de longueur  $\kappa$  tels que chaque  $\sigma_{i_1}[X_j]$  fait descendre la suite. Alors les  $\sigma_{i_1}[X_j]$  forment une suite qui descend  $\kappa$  fois.]

Ceci donne lieu à d'autres topologies : en prenant les ensembles (définissables, type-définissables respectivement) satisfaisant la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC comme base de fermés. À chaque fois, il suffit de clore par intersections quelconques.

**Proposition 1.6** *Supposons que l'action de  $\Sigma$  sur  $G^n$  soit définissable. Alors un ensemble  $X$  satisfaisant à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC est clos par suites  $\Sigma$ -indiscernable. Si  $X$  est définissable, la réciproque est vraie.*

□ Supposons que  $X$  ne soit pas clos par suites  $\Sigma$ -indiscernable. Soit alors  $(\bar{x}_i)_{i \in \omega}$  une telle suite avec  $\bar{x}_i \in X \iff i \geq 1$ . Par compacité, il existe pour tout  $i$  un  $\sigma_i \in \Sigma$  tel que  $\sigma_i(\bar{x}_j) = \bar{x}_{i+j}$ . Alors  $\bar{x}_i \notin \sigma_i[X]$  et donc  $\{\sigma_i[X] \mid i \in \omega\}$  ne satisfait pas à la DIC puisque  $\{\bar{x}_i \mid i \in \omega\} \cap \bigcap_{i \in \omega} \sigma_i[X] = \emptyset$ , mais  $\bar{x}_k \in \bigcap_{i < k} \sigma_i[X]$  pour tout  $k$  fini.

Supposons maintenant que  $X$  soit définissable et ne satisfasse pas à la  $\Sigma$ - $\aleph_0$ -DIC. Donc il existe des  $\sigma_i \in \Sigma$  et des  $\bar{a}_i$  tels que  $\bar{a}_i \in \sigma_i[X]$  pour tout  $i \in \omega$  et  $\bar{a}_j \notin \sigma_i[X]$  si  $i < j$ . En particulier, on obtient des suites  $(\bar{a}_{j+i})_{i \in \omega}$  dont tous les éléments sauf le premier sont dans  $\sigma_j[X]$ . Par des arguments de compacité et de Ramsey, on peut trouver un  $\sigma[X]$  et une suite  $\Sigma$ -indiscernable avec cette propriété. □

**Question 1** *Est-ce qu'on a l'équivalent pour un ensemble type-définissable (avec la  $\kappa^+$ -DIC où  $\kappa$  borne la taille du type) ? Est-ce que la  $\Sigma$ - $\aleph_0$ -DIC pour un ensemble type-définissable implique qu'il est définissable ?*

**Corollaire 1.7** *Supposons que l'action de  $\Sigma$  sur  $G^n$  soit définissable. Alors un ensemble définissable satisfait à la  $\Sigma$ - $\aleph_0$ -DIC dès qu'il satisfait à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC pour un  $\kappa$ .*

Une preuve directe est simple :

□ Sans perte de généralité,  $\kappa$  peut être pris régulier. Soit  $X$  définissable, ne pas satisfaisant à la  $\Sigma$ - $\aleph_0$ -DIC. Alors il existe une suite de  $\Sigma$ -images  $\aleph_0$  fois descendante, donc le type suivant est consistant :

$$\left\{ \sigma_\alpha \in \Sigma, \exists \bar{x} \left( \neg \sigma_\alpha(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{j \in J} \sigma_j(\bar{x}) \right) \mid \alpha < \kappa, J \text{ fini } \subset \alpha \right\}$$

ce qui donne, par saturation de  $\mathfrak{G}$ , une suite  $\kappa$  fois descendante. □

**Corollaire 1.8** *Supposons que l'action de  $\Sigma$  sur  $G^n$  soit définissable. Alors la  $\Sigma$ -topologie est plus fine que celle engendrée par les ensembles satisfaisant la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC. La  $\Sigma^{\text{df}}$ -topologie coïncide avec celle engendrée par les ensembles définissables satisfaisant à la  $\Sigma$ - $\kappa$ -DIC.*

En particulier, pour un ensemble définissable, il n'y a qu'une notion de fermé relatif à un  $\Sigma$  agissant définissablement sur  $G^n$ .

S'il n'y a pas d'ambiguïté, je remplacerai  $\tau(\Sigma)$  par  $\Sigma$  et  $\tau^{\text{df}}(\Sigma)$  par  $\Sigma^{\text{df}}$ , etc., sans autre mention explicite.

### 1.3 Familles de topologies

Il s'agit maintenant de relier des topologies sur les différentes  $G^n$ .

**Définition 1.9**

- (a) *Une structure avec une famille  $\tau$  de topologies est la donnée d'une structure  $\mathfrak{M}$  et, pour tout  $n$ , une topologie  $\tau_n$  sur  $M^n$ . On parlera parfois, par abus de langage, d'une topologie sur  $\mathfrak{M}$ .*
- (b) *Soient  $\tau, \tau'$  deux familles de topologies sur  $\mathfrak{M}$ . Une application  $f : M^l \rightarrow M^m$  est un  $\tau$ - $\tau'$ -morphisme si, pour tout  $n \in \omega$ , l'application  $f_{[n]} := f \times \text{id}_{M^n}$  est  $\tau_{l+n}$ - $\tau'_{m+n}$ -continue. Si  $\tau = \tau'$ , je dirai  $\tau$ -morphisme ou morphisme tout court.*
- (c)  *$(\mathfrak{M}, \tau)$  est dite avoir une propriété topologique (p.ex. compact) si toutes les  $\tau_n$  ont cette propriété. Par contre,  $(\mathfrak{M}, \tau)$  est dite séparée (comme en géométrie algébrique) si la diagonale  $\Delta$  est fermée dans  $\tau_2$ .*
- (d) *Une structure faiblement topologisée est une structure  $\mathfrak{M}$  avec une famille  $\tau$  de topologies telles que toutes les fonctions définissables sans paramètres dans le pure langage d'égalité, i. e. toutes les fonctions du type  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ , sont des morphismes.*

(e) Une structure topologisée est une structure faiblement topologisée  $(\mathfrak{M}, \tau)$  tels que les fonctions de base sont des morphismes et les relation de base fermées.

**Remarque sur la définition :** les propriétés sur  $\tau$  dans (d) reviennent à dire que  $\tau$  est un foncteur  $\text{Fin} \rightarrow \text{Top}$  où  $\text{Fin}$  est la catégorie des nombres naturels avec toutes les fonctions,  $\text{Top}$  la catégorie des espaces topologiques avec les fonctions continues, et avec  $\tau(\alpha) : (x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_{\alpha(0)}, \dots, x_{\alpha(n-1)})$  pour tout  $\alpha : m \rightarrow n$ .

Une structure est faiblement topologisée par une famille de topologies  $\tau_n$  ssi toutes les projections  $\pi_k : M^{k+1} \rightarrow M^k$ ,  $(x, \bar{y}) \mapsto \bar{y}$ , toutes les permutations de coordonnées, et toutes les applications diagonales  $\delta_k : M^{k+1} \rightarrow M^{k+2}$ ,  $(x, \bar{y}) \mapsto (x, x, \bar{y})$  sont continues.

**Remarque sur la terminologie :** J'appelle ces structures « topologisées » (ce qui n'est pas très joli) et non pas « topologiques » parce que classiquement il n'y qu'une topologie dans une structure topologique et les applications de base sont continues par rapport aux topologies produit.

Soit  $\Sigma_\bullet$  une suite de groupes opérant sur  $M^n$ , c.-à-d. un groupe  $\Sigma_n$  agissant sur  $M^n$ , et  $\tau(\Sigma_\bullet)$  la famille des  $\Sigma_n$ -topologies (respectivement  $\tau^{\text{df}}(\Sigma_\bullet)$  celle des  $\Sigma_n^{\text{df}}$ -topologies).

**Lemme 1.10** *Supposons que  $\Sigma_\bullet$  est tel que*

– pour toute permutation  $\tau \in \text{Sym}(n)$  et tout  $\sigma \in \Sigma_n$ ,  $\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau \in \Sigma_n$  (où  $\tau$  agit sur les indices des coordonnées)

– pour toute projection  $\pi_n : M^{n+1} \rightarrow M^n$  et tout  $\sigma \in \Sigma_{n+1}$ , il existe un  $\sigma' \in \Sigma_n$  avec  $\pi \circ \sigma = \sigma' \circ \pi$

– pour toute application diagonale  $\delta_n : M^{n+1} \rightarrow M^{n+2}$  et tout  $\sigma \in \Sigma_{n+2}$ , il existe un  $\sigma' \in \Sigma_{n+1}$  avec  $\delta \circ \sigma' = \sigma \circ \delta$

alors  $(\mathfrak{M}, \tau(\Sigma_\bullet))$  est une structure faiblement topologisée.

□ Traduction immédiate de la définition. □

Remarquons qu'avec l'injection naturelle  $\text{Sym}(n) \hookrightarrow \text{Sym}(M^n)$ , la première condition se traduit en  $\text{Sym}(n) \subseteq \mathbb{N}_{\text{Sym}(M^n)}(\Sigma_n)$ .

**Exemple 1.11 (Les exemples génériques)** Soient  $A, B$  deux groupes agissant sur  $M$ . Alors on a les structures faiblement topologisées suivantes :

(1)  $(\mathfrak{M}, \tau(A))$  où  $\Sigma_n = A$  avec l'action diagonale sur  $M^n$ .

(2)  $(\mathfrak{M}, \tau(B^\bullet))$  où  $\Sigma_n = B \times \dots \times B$  avec l'action « coordonnée par coordonnée » sur  $M^n$ .

(3)  $(\mathfrak{M}, \tau(A \cdot B^\bullet))$  où  $\Sigma_n =$  le groupe de permutations engendré par  $A$  et  $B \times \dots \times B$  avec les actions précédentes.

**Remarque sur la notation :**  $\Sigma_\bullet$  dénote une suite de groupes  $\Sigma_n$  quelconque ;  $\Sigma^\bullet$  la suite des  $\Sigma^n = \Sigma \times \dots \times \Sigma$  avec les actions coordonnée par coordonnée ; et  $\Sigma$  parfois la suite constante  $\Sigma$  avec les actions diagonales.

$\tau_n(\text{Aut}(\mathfrak{M}))$  est donc la topologie de Sroure sur  $M^n$ , associée à l'action diagonale de  $\text{Aut}(\mathfrak{M})$  sur  $M^n$  ; par contre  $\tau(\text{Aut}^n(\mathfrak{M})) = \tau_n(\text{Aut}^\bullet(\mathfrak{M}))$  est la topologie sur  $M^n$  associée à l'action de  $\text{Aut}(\mathfrak{M}) \times \dots \times \text{Aut}(\mathfrak{M})$ .

Pour décharger les notations, j'oublierai souvent la structure et j'écrirai simplement  $\tau(\text{Aut})$  etc.

Soit  $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}$  un groupe. On s'intéressera aux combinaisons entre  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$  et  $G$  agissant par translation à gauche et à droite, en particulier à  $\text{Hol}_n(\mathfrak{G})$  qui est le groupe engendré par  $\text{Aut}(\mathfrak{G})$ , par  $G^n$  agissant par translation à gauche, et par  $G^n$  agissant par translation à droite.

**Exemple 1.12**

(1)  $(\mathfrak{M}, \tau(\text{Aut}))$  est une structure topologisée, donc toute structure est topologisée par la topologie de Sroure, et de façon T1, quasi-compacte, localement noetherienne, séparée.

(2) Un groupe algébrique est topologisé par la topologie de Zariski de façon T1, quasi-compacte, noetherienne, séparée.

Est-ce que le dernier est de la forme  $(\mathfrak{G}, \tau(\Sigma_\bullet))$  ?

## 1.4 Généralisations possibles

### 1.4.1 Définitions syntaxiques

**Lemme 1.13** *Soit l'action de  $\Sigma$  sur  $G^n$  définissable. Si  $X$  est un  $\Sigma$ -fermé définissable, alors il existe une formule  $\varphi$  tel que  $X$  est défini par une  $\varphi$ -instance et toute  $\varphi$ -instance définit un  $\Sigma$ -fermé.*

□ Soit  $X = \psi(G, \bar{a})$ . Alors

$$\text{tp}(\bar{a}) \vdash \neg \left( \exists (x_i)_{i \in \omega} [ (x_i)_{i \in \omega} \text{ est } \Sigma\text{-indiscernable} \wedge \neg \psi(\bar{x}_0, \bar{a}) \wedge \bigwedge_{i \geq 1} \psi(\bar{x}_i, \bar{a}) ] \right)$$

Le côté droit est exprimé par un type partiel ; il existe donc une formule interpolante  $\delta$  et on posera  $\varphi(\bar{x}) := \psi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \delta(\bar{y})$ . □

Les  $\Sigma$ -fermés définissables sont donc exactement définis par des instances d'une certaine famille de formules. Ceci est parfois utile dans les raisonnements et ça place les  $\Sigma^{\text{df}}$ -topologies dans un contexte plus vaste : on pourrait considérer n'importe quelle famille de formules (close par combinaisons booléennes positives) et prendre les ensembles définies par ses instances comme base de fermés. On particulier on pourra penser à restreindre une  $\Sigma^{\text{df}}$ -topologie en imposant des conditions syntaxiques supplémentaires.

### 1.4.2 Constructions « ad hoc »

Si la  $\Sigma$ -topologie manque une propriété, on peut essayer de considérer la plus grand sous-topologie ayant cette propriété. Deux propriétés importantes qu'on peut obtenir ainsi sont :

- « Topologies fibreuses » : toute fibre d'un fermé est fermé.
- « Topologies invariantes par translation » : tout translaté d'un fermé est fermé.

**Définition 1.14** *Soit  $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}(G^{<\omega})$ .*

- Soit  $\mathcal{F}^f$  la plus petit partie de  $\mathcal{F}$  close par fibre :  $\mathcal{F}^f := \{X \in \mathcal{F} \mid \text{tout fibre de } X \text{ est dans } \mathcal{F}\}$ .*
- Soit  $\mathcal{F}^t$  la plus petit partie de  $\mathcal{F}$  close par translation :  $\mathcal{F}^t := \{X \in \mathcal{F} \mid \bar{g} \cdot X \cdot \bar{h} \in \mathcal{F} \text{ pour tout } \bar{g}, \bar{h} \in G^n \text{ et (l'unique) } n \text{ tel que } X \subseteq G^n\}$ .*
- Soit  $\mathcal{F}^c$  la plus petit partie de  $\mathcal{F}$  close par conjugaison :  $\mathcal{F}^c := \{X \in \mathcal{F} \mid \bar{g}^{-1} \cdot X \cdot \bar{g} \in \mathcal{F} \text{ pour tout } \bar{g} \in G^n \text{ et (l'unique) } n \text{ tel que } X \subseteq G^n\}$ .*
- Soit  $\mathcal{F}^{\text{pr}}$  la plus petit partie de  $\mathcal{F}$  close par image sous projection :  $\mathcal{F}^{\text{pr}} := \{X \in \mathcal{F} \mid \pi[X] \in \mathcal{F} \text{ pour toute projection standard } \pi\}$ .*

Les opérations « prendre une fibre », « un conjugué » et « un translaté » commutent avec des intersections et des réunions. Donc si  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des fermés d'une famille de topologies  $\tau$ , alors  $\mathcal{F}^f$ ,  $\mathcal{F}^c$  et  $\mathcal{F}^t$  sont les fermés de topologies  $\tau^f$ ,  $\tau^c$  et  $\tau^t$  respectivement. Ceci ne marche pas pour les projections,  $\mathcal{F}^{\text{pr}}$  n'est pas nécessairement close par intersection (voir aussi p. 15). Bien sûr,  $\tau^f$ ,  $\tau^c$  et  $\tau^t$  ne sont autres que les topologies finales de  $\tau$  pour les applications  $\bar{x} \mapsto (\bar{x}, \bar{a})$ , les conjugaisons et les translations respectivement.

Un des buts est de trouver une topologie pour laquelle la multiplication  $\mu$  (et plus généralement tous les termes) soit continue. Pour cela on pourrait prendre la topologie finale par rapport à  $\mu$ . Mais on a aucun contrôle sur les fermés de cette topologie ; en particulier on ne peut pas facilement déterminer si elle est triviale. La raison est que  $\mu$  est une fonction  $G^n \rightarrow G^m$  avec  $n > m$ . Dans les cas ci-dessus on peut décrire les fermés de  $G^n$  par induction sur  $n$  à partir des fermés de départ.

### 1.4.3 Topologie absolues

Un des désavantages de la topologie de Srouf est qu'elle dépend trop du langage. On pourrait donc définir une « topologie de Srouf absolue » en prenant l'intersection de toutes les topologies

de Srour pour tous les langages possibles. Le problème alors est qu'on a plus aucun contrôle sur les fermés.

(Remarquons que le complément de la diagonale reste fermé dans la topologie de Srour absolue, mais il ne le sera plus dans la version absolue de la topologie de Srour fibreuse.)

#### 1.4.4 Itérations

Étant donné une topologie  $\tau(\Sigma_\bullet)$  sur  $\mathfrak{G}$ , on peut essayer de l'utiliser pour définir un autre groupe agissant sur  $\mathfrak{G}$ . On pourrait penser à définir  $\Sigma_n^{(k+1)}$  comme le groupe des  $\tau(\Sigma_n^{(k)})$ -homéomorphismes de  $G^n$ , et  $\tau(\Sigma_n^{(\omega)})$  comme l'intersection de tous les  $\tau(\Sigma_n^{(k)})$ .

Remarquons que tout fermé de Zariski est H-fermé, où H dénote le groupe des homéomorphismes de la topologie de Zariski, ceci parce que la topologie de Zariski est noetherien. C'est faux en général; mais cela ne veut pas encore dire que la topologie de Zariski est contenue dans  $\tau(\Sigma_\bullet^{(\omega)})$  si elle l'est dans  $\tau(\Sigma_\bullet)$ .

## 2 Termes

### 2.1 Continuité des termes

Sans spécification aucune, « terme » voudra dire « terme dans le pure langage des groupes  $\{\mu, \iota, e\}$ , possiblement avec paramètres ». Un terme  $t(x_1, \dots, x_k)$  définit une application  $\hat{t} : G^k \rightarrow G$ ; je confondrai souvent le terme avec cette application et parlera par exemple de la continuité d'un terme.

Partons maintenant à la recherche d'une topologie pour laquelle tous les termes sont continus. Ceci parce que la continuité des terms pour la topologie de Zariski est essentiel en géométrie algébrique.

**Lemme 2.1** *Soit  $(\mathfrak{G}, \tau)$  une structure faiblement topologisée. Équivalent sont*

- tous les termes sont  $\tau$ -continus.
- tous les termes sont des  $\tau$ -morphisms.
- $\mu, \iota, \delta : x \mapsto (x, x)$ , et toutes les fonctions constantes  $\tilde{a} : x \mapsto a$  sont des  $\tau$ -morphisms.

□ Pour la première équivalence, il suffit de remarquer que  $\tilde{t}_{[n]} = \tilde{s}$  pour un terme s. Pour l'implication de bas en haut, suivre la construction inductive d'un terme. □

**Remarque 2.2** *Soit  $\tau$  une famille de topologies sur  $\mathfrak{G}$  donnée par une notion de clôture par  $\tau$ -suites. Si  $(x_i^{-1}, \bar{y}_i)_{i \in \omega}$  est une  $\tau$ -suite pour toute  $\tau$ -suite  $(x_i, \bar{y}_i)_{i \in \omega}$ , alors  $\iota$  est un  $\tau$ -morphisme. Si  $(x_i, x_i \bar{y}_i)_{i \in \omega}$  est une  $\tau$ -suite pour toute  $\tau$ -suite  $(x_i, \bar{y}_i)_{i \in \omega}$ , alors  $\delta$  est un  $\tau$ -morphisme.*

#### 2.1.1 Applications constantes et topologies fibreuses

**Lemme 2.3**  $\mu, \iota$  et  $\delta$  sont des Aut-morphisms; les applications constantes  $\tilde{c}$  le sont ssi  $c \in \text{acl}(\emptyset)$ . Toutes les applications constantes sont des  $\tau$ -morphisms ssi  $\tau$  est fibreuse.

□ Toutes les applications  $\emptyset$ -définissables sont clairement des Aut-morphisms, donc aussi les  $\tilde{c}$  pour  $c \in \text{acl}(\emptyset)$ . Par contre,  $\tilde{c}^{-1}[M^2 \setminus \Delta]$  n'est pas fermé pour tout autre c. La dernière affirmation est pratiquement par définition. □

**Remarque 2.4**  $\tau^f$ , la plus grande sous-topologie fibreuse de  $\tau$ , est la topologie finale de  $\tau$  pour les applications constantes. Si  $\tau = \tau(\Sigma_\bullet)$ , alors  $\tau^f$  est la topologie associée aux suites  $(\bar{x}_i)_{i \in \omega}$  qui sont constantes dans quelques coordonnées et dont la restriction aux autres coordonnées donne une suite de  $\Sigma$ -indiscernables.

En particulier  $\tau(\text{Aut})^f$  contient  $\tau(\text{Aut}^\bullet)$ . L'inclusion est stricte, car p.ex. l'adhérence de la diagonale dans  $\tau(\text{Aut}^\bullet)$  est  $\bigcup \{p[\mathbb{M}] \times p[\mathbb{M}] \mid p \in S_1(\emptyset)\}$ . On voit que  $\tau(\text{Aut}^\bullet)$  est trop grossière et probablement pas très utile.

J'utilise les notations  $X_{\bar{a}} = \{\bar{x} \mid (\bar{x}, \bar{a}) \in X\}$  et  ${}_{\bar{a}}X = \{\bar{x} \mid (\bar{a}, \bar{x}) \in X\}$  pour les fibres. Toutes les fibres ne sont pas de cette forme, mais on peut souvent se limiter à ces cas en raisonnant à permutation de coordonnées près.

**Lemme 2.5**  $\iota, \delta$  et les applications constantes sont des  $\text{Aut}^f$ -morphisms ;  $\mu$  ne l'est pas. Plus précisément, si  $\mu$  est un  $\tau$ -morphisme pour une topologie fibreuse  $\tau$ , alors  $\tau = \tau^t$ .

□ Les applications constantes le sont par définition,  $\iota$  et  $\delta$  par 2.2. Si  $\mu$  est un morphisme, alors  $\bar{\mu} : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$  aussi. Donc si  $\tau$  est fibreuse, alors  $\tau$  est invariante par translation car  $\bar{g} \cdot X = {}_{\bar{g}^{-1}}(\bar{\mu}^{-1}[X])$  et  $X \cdot \bar{g} = (\bar{\mu}^{-1}[X])_{\bar{g}^{-1}}$ . Et puis  $G \setminus \{e\}$  est  $\text{Aut}^f$ -fermé, mais pas  $\text{Aut}^t$ -fermé. □

En fait, on peut facilement montrer que  $\iota$  et  $\delta$  sont des  $\tau^f$ -morphisms si ce sont des  $\tau$ -morphisms.

**Corollaire 2.6** Si les termes sont tous  $\tau$ -continues pour une sous-topologie de  $\tau(\text{Aut})$ , alors  $\tau \subseteq \tau(\text{Aut})^t$ .

**Proposition 2.7**  $(\mathfrak{M}, \tau(\text{Aut})^f)$  est une structure faiblement topologisée, invariante et séparée.  $\mathcal{F}(\text{Aut})^f$  est une sous-famille propre de  $\mathcal{F}(\text{Aut})$  contenant les fermés triviaux.  $\mathcal{F}(\text{Aut})^f$  est close par « quantification universelle » (i.e. les projections sont des applications ouvertes) et fibres.

□ Clairement la définition de  $\tau(\text{Aut})^f$  est invariante et les permutations de coordonnées sont des morphisms. Une fibre d'un fermé trivial est encore un tel fermé ; « quantification universelle » et « fibres » commutent ; le reste a déjà été démontré. □

$\tau(\text{Aut})^f$  est une meilleure approximation de la topologie de Zariski, surtout parce que des ensembles comme le complément de la diagonale ne sont plus fermés. Toutefois,  $\tau_1(\text{Aut})^f = \tau_1(\text{Aut})$ , et peut donc contenir des ensembles cofinis si  $\text{acl}(\emptyset) \neq \emptyset$ . Aussi tout ensemble de rang 1 dans  $\mathcal{F}(\text{Aut})$  est aussi dans  $\mathcal{F}(\text{Aut})^f$ .

### 2.1.2 Topologies invariantes par translations

$\tau(\text{Aut})^t$  est un premier candidat sérieux pour la continuité des termes ; c'est vrai dans les groupes abéliens, mais inconnu pour les groupes algébriques.

**Remarque 2.8**  $\tau^t$ , la plus grande sous-topologie invariante par translation de  $\tau$ , est la topologie finale de  $\tau$  pour les translations (des deux côtés). Si  $\tau = \tau(\Sigma_\bullet)$ , alors  $\tau^t$  est la topologie associée aux suites  $(\bar{x}_i)_{i \in \omega}$  pour lesquelles il existe  $\bar{g}$  et  $\bar{h}$  tels que  $(\bar{g} \cdot \bar{x}_i \cdot \bar{h})_{i \in \omega}$  est indiscernable.

**Proposition 2.9**  $\tau(\text{Aut})^t = \tau(\text{Hol}_\bullet)$ .

□ Supposons qu'il existe une chaîne infinie

$$\varphi(\bar{x}, \bar{b}_0)^G \supset \varphi(\bar{x}, \bar{b}_0)^G \cap \varphi(\bar{x}, \bar{b}_1)^G \supset \dots \supset \varphi(\bar{x}, \bar{b}_0)^G \cap \dots \cap \varphi(\bar{x}, \bar{b}_0)^G \supset \dots$$

Alors pour tout  $A$  il existe une telle chaîne avec des  $\bar{b}_i$  indiscernables au-dessus de  $A$  (et leur type au-dessus de  $A$  est un type limite des types des  $\bar{b}_i$  de départ) : ceci parce que l'existence d'une telle suite est exprimée par

$$\bigwedge_{n \in \omega} \exists \bar{x}_n (\varphi(\bar{x}_n, \bar{b}_0) \wedge \dots \wedge \varphi(\bar{x}_n, \bar{b}_n) \wedge \neg \varphi(\bar{x}_n, \bar{b}_{n+1}))$$

et on peut y appliquer les raisonnements standard utilisant Ramsey et compacité.

Supposons maintenant que  $X = \varphi(\bar{x}, \bar{b})^G \notin \mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$  et que les  $\bar{g}_i X^{\alpha_i} \bar{h}_i = \varphi(\bar{g}_i^{-1} \bar{x} \bar{h}_i^{-1}, \bar{b}_i)^G$  forment une chaîne infinie strictement descendante pour  $i \in \omega$ . Par la remarque précédente,

tous les  $(\bar{g}_i, \bar{h}_i, \bar{b}_i)$  peuvent avoir le même type. Ceci montre que  $\bar{g}_0 X^{\alpha_0} \bar{h}_0 \notin \mathcal{F}(\text{Aut})$ , donc aussi  $\alpha_0^{-1}[\bar{g}_0] \cdot X \cdot \alpha_0^{-1}[\bar{h}_0] \notin \mathcal{F}(\text{Aut})$ , d'où  $X \notin \mathcal{F}(\text{Aut})^t$ .  $\square$

**Lemme 2.10**  $\iota, \delta$  et les applications constantes sont des  $\text{Hol}_\bullet$ -morphisms.

$\square$   $\delta$  car c'est un des exemple génériques 1.11;  $\iota$  à cause de 2.2.

Soit  $X \in \mathcal{F}(\text{Aut})^t$ . Alors  $\bar{g} \cdot X_{\bar{a}} \cdot \bar{h} = ((\bar{g}, \bar{a}^{-1}) \cdot X \cdot (\bar{h}, \bar{e}))_{\bar{e}} \in \mathcal{F}(\text{Aut})$ .  $\square$

En fait, on montre facilement que  $\iota$  et  $\delta$  sont des  $\tau^t$ -morphisms si ce sont des  $\tau$ -morphisms. Par contre, une sous-topologie invariante par translation  $\tau$  de la topologie de Srour n'est pas nécessairement fibreuse; pour que ce raisonnement marche, il faut que  $\bar{e}$  soit un  $\tau$ -morphisme.

**Lemme 2.11** Si un sous-groupe définissable  $H$  est un fermé de Srour, alors tous ses cosets sont des fermés de Srour.

$\square$  Soit  $(\bar{x}_i)_{i \in \omega}$  une suite d'indiscernables telle que  $\bar{x}_i \in \bar{a}H$  pour tout  $i > 0$ . Alors  $(\bar{x}_1^{-1} \bar{x}_i)_{i \neq 1}$  est une suite d'indiscernables dont presque tous les éléments sont dans  $H$ . Puisque  $H$  est un fermé de Srour,  $\bar{x}_1^{-1} \bar{x}_0 \in H$ . Donc  $\bar{x}_0 \in \bar{x}_1 H = \bar{a}H$ ,  $\bar{a}H$  est un fermé de Srour, et  $H\bar{a}^{-1} = \bar{\tau}[\bar{a}H]$  également.  $\square$

Obs : ceci ne montre pas que  $H \in \mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$ . Par contre, si  $N \trianglelefteq G^n$  est un fermé de Srour, alors  $N \in \mathcal{F}(\text{Hol})$  – ce qui n'est pas  $\mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$ ! Un sous-groupe définissable caractéristique est bien sûr un fermé de Srour.

Pour un sous-groupe définissable, être un fermé de Srour s'appelle aussi « la condition de Baldwin–Saxl ».

**Lemme 2.12** Dans un groupe stable, les cosets des sous-groupes définissables sont  $\text{Hol}_\bullet$ -fermés.

$\square$  Les translatés de conjugué d'un tel coset forment une famille uniformément définissable. Si leur intersection est vide, une sous-intersection finie l'est par compacité. Sinon on peut translater la situation de façon que  $e$  est dans l'intersection, alors on aura une famille uniformément définissable de sous-groupes et la condition de Baldwin–Saxl s'applique.  $\square$

**Proposition 2.13**  $(\mathfrak{G}, \tau(\text{Hol}_\bullet))$  est une structure faiblement topologisée, invariante et séparée.  $\mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$  est une sous-famille propre de  $\mathcal{F}(\text{Aut})^t$ , contenant les cosets des sous-groupes définissables caractéristiques (en particulier les fermés triviaux), et close par quantification universelle et fibres.

$\square$  Ce qui n'a pas encore été prouvé est immédiat.  $\square$

**Problème 1** Dans quels groupes est-ce que la multiplication est continue pour  $\tau(\text{Hol}_\bullet)$  ?

Si c'est le cas, alors le groupe est centralisateur-connexe (voir 2.2), et on connaît des exemples de groupes nilpotent, (et/ou) de théorie simple, qui ne le sont pas. La stabilité semble donc une condition nécessaire. Je n'ai ni de réponse pour le cas  $\omega$ -stable, ni pour des groupes algébriques. Le seul résultat positif général est :

**Lemme 2.14**  $\mu$  est un  $\text{Aut}^f$ - $\text{Hol}_\bullet$ -morphisme. Si  $\mathfrak{G}$  est abélien, alors  $\mu$  est un  $\text{Hol}_\bullet$ -morphisme.

$\square$  Soit  $X \in \mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$ . Alors  $\mu_{[n]}^{-1}[X] \in \mathcal{F}(\text{Aut})$  et il reste à vérifier que toute fibre  $y$  est. Il suffit de considérer les cas suivants (le reste est analogue ou s'ensuit) :

$$\left. \begin{aligned} (\mu_{[n]}^{-1}[X])_{(b_1, \dots, b_m)} &= \mu_{[n-m]}^{-1}[X_{(b_1, \dots, b_m)}] \\ \mathfrak{a}(\mu_{[n]}^{-1}[X]) &= (\mathfrak{a}^{-1}, \bar{e}) \cdot X \\ (\mathfrak{a}, b)(\mu_{[n]}^{-1}[X]) &= \mathfrak{a} \cdot b X \end{aligned} \right\} \in \mathcal{F}(\text{Aut}).$$

Si  $\mathfrak{G}$  est abélien, alors  $(g_1, g_2, \bar{g}) \cdot \mu_{[n]}^{-1}[X] = \mu_{[n]}^{-1}[(g_1 g_2, \bar{g}) \cdot X] \in \mathcal{F}(\text{Aut})$ .  $\square$

Soit  $\tau_n^c$  la topologie finale de  $\tau_n$  relative aux conjugaisons avec des  $n$ -uples arbitraires.

**Lemme 2.15**

- (a)  $\mu$  est un  $\text{Hol}_\bullet$ -morphisme ssi toutes les applications  $\mu_a : (x, y) \mapsto xay$  sont des  $\text{Aut-Hol}_\bullet$ -morphisms.
- (b)  $\mu$  est un  $\text{Hol}_\bullet$ -morphisme ssi  $\mu$  est un  $\text{Aut}^c\text{-Hol}_\bullet$ -morphisme. En particulier, si les conjugués sont des  $\text{Aut}$ -morphisms, alors  $\mu$  est un  $\text{Hol}_\bullet$ -morphisme.

□ Tout vient des transformations suivantes :

$$\begin{aligned} (g_0, g_1, \bar{g}) \cdot \mu_{[n]}^{-1}[X] \cdot (h_0, h_1, \bar{h}) &= \{(x, y, \bar{z}) \mid (xh_0^{-1}g_1^{-1}y, \bar{z}) \in (g_0, \bar{g}) \cdot X \cdot (h_1, \bar{h})\} \\ &= \mu_{(g_1 h_0)^{-1}[n]}^{-1}[(g_0, \bar{g}) \cdot X \cdot (h_1, \bar{h})] \\ &= \left( \mu_{[n]}^{-1}[(g_1 h_0 g_0, \bar{g}) \cdot X \cdot (h_1, \bar{h})] \right)^{(g_1 h_0, \bar{e})} \end{aligned}$$

La nécessité des conditions est claire. □

Tout fermé de Zariski est  $\text{Hol}_\bullet$ -fermé; le réciproque est fausse : soit dans le groupe additive d'un corps algébriquement clos le cercle de centre  $(a, b)$  et de rayon  $r$ . Si on en enlève le point  $(a+r, b)$  (qui est définissable au-dessus de la base canonique du cercle), on obtient un  $\text{Hol}_\bullet$ -fermé qui n'est pas un fermé de Zariski.

**Problème 2** Est-ce que  $\tau(\text{Hol}_\bullet)$  peut augmenter quand on nomme des constantes ?

## 2.2 Groupes localement noetheriens

Soit  $t(x_1, \dots, x_k)$  un terme. Soit  $V_a(t) := \tilde{t}^{-1}(a)$ , c.-à-d. l'ensemble défini par  $t(x_1, \dots, x_k) = a$ ; j'appelle  $V(t) := V_e(t) \llcorner$  l'ensemble des zéros de  $t \gg$  ou  $\llcorner$  l'ensemble défini par  $t \gg$ . Toute équation entre termes  $t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{y})$  peut être transformée en  $t(\bar{x}, \bar{y}) := \mu(t_1(\bar{x}), t_2^{-1}(\bar{y})) = e$

**Définition 2.16**

- (a) Soit  $\mathcal{V}$  la famille des ensembles définis par des termes.
- (b)  $\mathfrak{G}$  est appelé localement noetherien si  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}(\text{Aut})$ , i.e. si les termes définissent des fermés de  $\text{Sour}$ .

Si  $\mathfrak{G}$  est localement noetherien, alors  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$ . C'est un résultat local, i.e. si  $t(\bar{x}, \bar{y})$  est un terme sans paramètres et  $V(t(\bar{x}, \bar{a})) \in \mathcal{F}(\text{Aut})$  pour tout  $\bar{a}$ , alors  $V(t(\bar{x}, \bar{a})) \in \mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$ .

**Exemple 2.17**

- (1) Les groupes linéaires (sur un corps quelconque) sont localement noetherien car les termes définissent des fermés de Zariski.  
En particulier, les groupes libres avec  $\leq \aleph_0$  générateurs et les groupes nilpotent finiment engendrés sont localement noetheriens, [W].
- (2) Les groupes (stables) abéliens-par-fini sont localement noetherien : pour  $\llcorner$  abélien  $\gg$ , c'est une conséquence du lemme 2.14, les extensions finies viennent de 2.18.
- (3) Voici un exemple nilpotent qui n'est pas centralisateur-connexe : Soit  $G = \bigoplus_{i \in \omega} \langle g_i, h_i \rangle$  où  $[g_i, h_i] \neq e$ . Alors  $G$  est nilpotent de classe 2 et possède la chaîne de centralisateurs  $\mathbb{C}_G(g_0) \supset \mathbb{C}_G(g_0, g_1) \supset \mathbb{C}_G(g_0, g_1, g_2) \supset \dots$  (exemple de Kegel).
- (4) On peut trouver dans [Br] un exemple d'un groupe centralisateur-connexe qui n'est pas localement noetherien.

**Question 2** Est-ce que les groupes stables sont localement noetheriens ?  
Est-ce qu'un groupe simple de rang de Morley fini est localement noetherien ?

La deuxième partie est un test pour la conjecture de Cherlin.

**Question 3** Est-ce qu'un groupe équationnel est localement noetherien ?

La construction de Mekler à partir de l'exemple d'une théorie  $\aleph_0$ -stable non-équationnelle donne certainement un groupe  $\aleph_0$ -stable non-équationnel, mais il est inconnu s'il existe un tel groupe de rang de Morley fini, voire une structure non-équationnelle de rang de Morley fini (la construction de Mekler augmente le rang).

Être localement noetherien ne dépend que du type d'isomorphisme en tant que pure groupe. La classe des groupes localement noetherien n'est pas axiomatisable ; elle est par contre close par équivalence élémentaire car dans chaque groupe, la longueur de chaînes est bornée pour chaque terme.

**Proposition 2.18 (a)** *La classe des groupes localement noetheriens est close par sous-groupe, extensions finis et produit directs finis.*

**(b)** *Elle n'est ni close par quotient, ni par extension avec un groupe localement noetherien.*

**(c)** *Un groupe (suffisamment saturé) résiduellement localement noetherien est localement noetherien.*

Dans (c), il faut que le groupe soit saturé par rapport au nombre de quotients nécessaire pour témoigner que le groupe est résiduellement localement noetherien. Si ce nombre est fini, aucune hypothèse sur le groupe est nécessaire.

□ (a) Pour les sous-groupes, il suffit de remarquer que les termes sont sans quanteurs et que la DIC est conservée quand on intersecte avec une partie de l'univers.

Pour les extensions finies, soit  $N \trianglelefteq G$  d'indice fini. Multiplication avec  $\bar{g}^{-1}$  induit une bijection entre  $V(t(\bar{x})) \cap \bar{g}N^n$  et  $V(t(\bar{g} \cdot \bar{x})) \cap N^n$ . Si  $N$  est localement noetherien, la DIC se propage sur tous les cosets de  $N^n$ , donc aussi sur  $G^n$ .

Les produits directs sont un cas particulier de (b) ; on notera qu'on aura pas besoin de la saturation dans la cas d'un produit fini.

(b) 2.17 donne un exemple d'un groupe à  $\aleph_0$  générateurs qui n'est pas localement noetherien. Il est le quotient du groupe libre à  $\aleph_0$  générateurs qui lui est localement noetherien. De plus il est nilpotent, donc extension d'un groupe abélien, donc localement noetherien, par un autre.

(c) Considérons le terme  $t(\bar{x}, \bar{y})$  et notons pour simplifier  $t(\bar{a}) := t(\bar{x}, \bar{a})$ . Supposons qu'il existe  $N_j \trianglelefteq G$ ,  $j \in J$ , avec  $\bigcap_{i \in I} N_i = \{e\}$  et tels que tous les  $G/N_i$  sont localement noetherien. Soit  $V_{N_j}(t) := \bar{t}^{-1}[N_j]$ . Alors pour des  $I_j$  finis  $\subseteq I$ , on a

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} V(t(\bar{a}_i)) &= \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} V_{N_j}(t(\bar{a}_i)) = \bigcap_{i \in I_1} \bigcap_{i \in I_j} V_{N_j}(t(\bar{a}_i)) \\ &= \bigcap_{i \in \bigcup_{j \in J} I_j} \bigcap_{j \in J} V_{N_j}(t(\bar{a}_i)) = \bigcap_{i \in \bigcup_{j \in J} I_j} V(t(\bar{a}_i)) \end{aligned}$$

Donc les  $V(t(\bar{a}))$  satisfont à la  $\max\{\aleph_0, |J|^+\}$ -DIC, donc par compacité aussi à la DIC. □

### 2.2.1 Deux ou trois choses que je sais de $\mathcal{V} \dots$

Tout ensemble dans  $\mathcal{V}$  est défini par une formule de la forme  $a_0 x_{i_0}^{\pm 1} \cdots a_n x_{i_n}^{\pm 1} = e$ . Parce que les application  $\emptyset$ -définissables sont Aut-continues, on peut éliminer les inverses et les doubles occurrences de variables. Soit  $V(a_0, \dots, a_n) := V(a_0 x_0 \cdots a_n x_n) = \{\bar{x} \mid a_0 x_0 \cdots a_n x_n = e\}$  où les  $x_i$  sont supposés deux à deux distinctes. Donc

**Remarque 2.19**  $\mathfrak{G}$  est localement noetherien ssi tous les  $V(a_0, \dots, a_n)$  sont dans  $\mathcal{F}(\text{Aut})$  ssi toutes les formules  $y_0 x_0 \cdots y_n x_n = e$  sont des équations dans le sens de Srouf (en  $\bar{x}$ ).

**Lemme 2.20** cas  $\boxed{n=1}$  :  $V(a) \in \mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$  pour tout  $a$ .

cas  $\boxed{n=2}$  :  $V(a, b) \in \mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$  pour tous  $a, b$  ssi  $\mathfrak{G}$  est centralisateur-connexe.

□ (a) Si  $t$  ne contient qu'une occurrence de variable, alors  $V(t)$  est un singleton.

(b) Puisque  $\iota$  est un morphisme, on peut aussi bien considérer  $V(\text{axby}^{-1}) = (a^{-1}, b) \cdot \Delta^{(e, b)}$  et il suffit donc d'étudier quand les conjugués de la diagonale satisfont à la condition de Baldwin–Saxl. Supposons  $0 \in I$ , alors

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} \Delta^{(e, b_i)} &= \bigcap_{i \in I} (\Delta^{(e, b_i)} \cap \Delta^{(e, b_0)}) &&= \bigcap_{i \in I} \{(x, x^{b_0}) \mid x^{b_0} = x^{b_i}\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \{(x, x^{b_0}) \mid x \in \mathbb{C}_G(g_i g_0^{-1})\} \stackrel{\text{def. isom.}}{\approx} \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_G(g_i g_0^{-1}) \end{aligned}$$

on obtient le résultat. □

Quelques observations et réductions pour le cas  $\boxed{n = 3}$  : Supposons  $\mathfrak{G}$  centralisateur-connexe. Soit  $V(a, b, c)$  l'un des  $V(a_i, b_i, c_i)$ . Alors

$$\bigcap_{i \in I} V(a_i, b_i, c_i) = \bigcap_{i \in I} (V(a_i, b_i, c_i) \cap V(a, b, c)) \stackrel{\text{def. isom.}}{\approx} \bigcap_{i \in I} \underbrace{\{(x, y) \mid \text{axbyc} = a_i x b_i y c_i\}}_{:= W(a_i, b_i, c_i)}$$

Soit  $(x_0, y_0)$  une solution fixée de  $\text{axbyc} = a_i x b_i y c_i$ , que l'on peut réécrire en  $b_i^{-1} x^{-1} a_i^{-1} a x b = y c_i c^{-1} y$ . Par conséquence,  $(x_0, y)$  en est une autre solution ssi  $y \in \mathbb{C}_G(c_i c^{-1})$ . Supposons que  $v : G \rightarrow G$  est telle que  $(x, v(x)) \in \bigcap_{i \in I} W(a_i, b_i, c_i)$ . Alors

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} \{(x, y) \mid \text{axbyc} = a_i x b_i y c_i\} &= \{(x, y) \mid x \in \text{dom}(v), y \in \bigcap_{i \in I} v(x) \cdot \mathbb{C}_G(c_i c^{-1})\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in \text{dom}(v), y \in v(x) \cdot \bigcap_{i \in I} \mathbb{C}_G(c_i c^{-1})\} \end{aligned}$$

et il suffit de voir que  $\text{dom}(v)$  est déterminé par un nombre fini de  $W(a_i, b_i, c_i)$ , c.-à-d., si  $\pi_1$  est la projection sur la première coordonnée, que

$$\pi_1 \left[ \bigcap_{i \in I} W(a_i, b_i, c_i) \right] = \pi_1 \left[ \bigcap_{i \in I_0} W(a_i, b_i, c_i) \right]$$

pour un  $I_0$  fini  $\subseteq I$ . On a donc besoin d'une compacité uniforme en  $x$ .

Soit  $W(\{i_1, \dots, i_n\}) := \bigcap_{j=1}^n W(a_{i_j}, b_{i_j}, c_{i_j})$ . On a clairement  $\bigcap_{i \in I} W(a_i, b_i, c_i) = \bigcap_{J \in [I]^n} W(J)$  pour tout  $n$ . Supposons que  $\mathfrak{G}$  n'a pas la propriété du recouvrement fini. Alors il existe  $n \in \omega$  tel que  $\pi_1^{-1}(x) \cap \bigcap_{i \in I} W(a_i, b_i, c_i) = \emptyset$  ssi  $\pi_1^{-1}(x) \cap W(J_x) = \emptyset$  pour un  $J_x \in [I]^n$ . La question se réduit donc à savoir si les  $W(J)$  sont des fermés de Sroure pour  $J \in [I]^n$ .

Soit  $(x, y_j(x)) \in W(a_j, b_j, c_j)$ . Alors

$$(x, y, z) \in \bigcap_{j \in J} W(a_j, b_j, c_j) \iff y \in \bigcap_{j \in J} y_j(x) \cdot \mathbb{C}_G(c_j c_j^{-1})$$

Il s'ensuit que

$$\pi_1[W(J)] = \{x \mid \bigcap_{j \in J} y_j(x) \mathbb{C}_G(c_j c_j^{-1}) \neq \emptyset\} \cap \bigcap_{j \in J} \pi_1[W(a_j, b_j, c_j)]$$

et on pourrait peut-être réduire le problème à savoir si les  $\pi_1[W(a, b, c)]$  sont des fermés de Sroure.

Bine s'êt, des considérations similaire sont possible dans le cas générale  $n \geq 3$

**Lemme 2.21** *Supposons que pour  $n$  fixé, tous les  $V(a_1, \dots, a_n)$  sont des fermés de Sroure. Alors tous les  $V(a_1 x_1 \cdots a_n x_n a_{n+1})$  et les  $V(x_0 a_1 x_1 \cdots a_n x_n)$  sont des fermés de Sroure.*

□  $V(a_1 x_1 \cdots a_n x_n a_{n+1}) = V(a_{n+1}^{-1} a_1 x_1 \cdots a_n x_n)$ . Donc  $y_1 x_1 \cdots y_n x_n y_{n+1} = e$  est une équation dans le sens de Sroure en  $\bar{x}$ , et par symétrie aussi en  $\bar{y}$ . □

**Corollaire 2.22** Soit  $\mathfrak{G}$  centralisateur-connexe,  $x_i, y_i, z_i$  des variables (non nécessairement distinctes), et  $a, b, c \in G$ , alors :

$$\begin{aligned} V(a \cdot x_0^{\pm 1} \cdots x_n^{\pm 1} \cdot b \cdot y_0^{\pm 1} \cdots y_m^{\pm 1} \cdot c) &\in \mathcal{F}(\text{Aut}) \\ V(x_0^{\pm 1} \cdots x_n^{\pm 1} \cdot b \cdot y_0^{\pm 1} \cdots y_m^{\pm 1} \cdot c \cdot z_0^{\pm 1} \cdots z_k^{\pm 1}) &\in \mathcal{F}(\text{Aut}) \end{aligned}$$

Les ensembles de zéros basiques sont les singletons  $V(a)$ , la diagonale  $V(xy^{-1})$  et les graphs  $V(xyz^{-1})$  de  $\mu$  et  $V(xy)$  de  $\iota$ .

**Lemme 2.23** Supposons que  $\mathcal{F}$  est clos par permutations de coordonnées, intersection finie et produit cartésien avec  $G$ , et qu'il contient les ensembles de zéros basiques. Alors  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}^{\text{Pr}^t}$  où  $\mathcal{F}^{\text{Pr}^t}$  dénote l'ensemble des images de  $\mathcal{F}$  sous les projections standard.

□ Soit  $V \in \mathcal{V}$  défini par  $a_1 x_1^{\pm 1} \cdots a_n x_n^{\pm 1} = e$ . Alors il est aussi défini par

$$\exists y_1 \dots \exists y_{2n} (y_1 = a_1 \wedge y_2 = x_1^{\pm 1} \wedge \cdots \wedge y_{2n-1} = a_n \wedge y_{2n} = x_n^{\pm 1} \wedge y_1 \cdots y_{2n} = e).$$

La partie  $y_1 \cdots y_m = e$  peut être davantage décomposée en

$$\exists z (y_1 y_2 = z_1 \wedge z_1 y_3 = z_2 \wedge \cdots \wedge z_{m-1} y_m = e).$$

Donc  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}^{\text{Pr}^t}$ , mais  $\mathcal{V}$  est invariant par translation. □

Les ensembles de zéros basiques sont dans  $\mathcal{F}(\text{Aut})^f \cap \mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{Pr}^t}$ . Je ne sais pas si  $\mathcal{F}(\text{Aut})^f$  est la famille de tous les ensembles définissables.  $\mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{Pr}^t}$  n'est pas clos par intersection finie.

Dans un groupe centralisateur-connexe, tous les ensembles de zéros basiques sauf peut-être  $V(xyz^{-1})$  sont dans  $\mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$ . A-t-on un critère simple pour que  $V(xyz^{-1}) \in \mathcal{F}(\text{Hol}_\bullet)$  ?

## 2.2.2 La propriété de Poizat

Appelons *propriété de Poizat* d'un groupe (stable) la propriété suivante : si  $t(x_1, \dots, x_k)$  est un terme à paramètre dans  $A$  et  $V(t)$  est générique (au-dessus de  $A$ ), alors  $V(t) = G^k$ .

**Lemme 2.24** Tout groupe (stable) localement noetherien satisfait à la propriété de Poizat.

La preuve utilise le fait suivant :

**Fait 2.25** ([JL] section 4.1, T stable) Si  $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}$  et  $X \subseteq M^n$  est un fermé de Sroure qui contient  $M_0^n$ , alors  $X = M^n$ .

Remarquons que l'adhérence dans la topologie de Sroure d'un ensemble générique n'est pas nécessairement tout !

□ Soit  $\mathfrak{G}_0$  une sous-structure élémentaire contenant les paramètres d'un terme  $t(x_1, \dots, x_k)$ . Supposons  $\bar{g} \in V(t)$  pour un  $\bar{g} \in G^k$  générique au-dessus de  $G_0$ . Puisque  $\bar{g} \cdot \bar{h}$  est générique au-dessus de  $G_0$  pour tout  $\bar{h} \in G_0^k$ , on aura  $\bar{g} \cdot \bar{h} \in \mathcal{V}(t)$  et donc  $G_0^k \subseteq \bar{g}^{-1} \cdot \mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(t(\bar{g} \cdot \bar{x}))$ . Puisque le dernier est un fermé de Sroure par l'hypothèse, on a  $G^k = V(t(\bar{g} \cdot \bar{x}))$ , donc aussi  $G^k = V(t)$ . □

**Corollaire 2.26** Supposons qu'il existe une « sous-topologie » de la topologie de Sroure sur  $\mathfrak{G}$  telle que tous les termes sont continus. Alors le groupe satisfait à la propriété de Poizat.

**Exemple 2.27** Les groupes (stables) nilpotents-par-fini satisfont à la propriété de Poizat, [Ja].

### 3 Complétude

#### Définition 3.1

- (a) Soient  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  deux familles d'ensembles. On dit qu'une structure  $\mathfrak{M}$  est  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -complète si  $\mathcal{F}_1^{\text{pr}} \subseteq \mathcal{F}_2$ , i.e. si toute image d'un ensemble définissable de  $\mathcal{F}_1$  par une projection est dans  $\mathcal{F}_2$ .
- (b) Soit  $C = \tilde{C}/E \subseteq M^{\text{eq}}$  avec  $\tilde{C} \subseteq M^k$ . Alors  $C \subseteq M^{\text{eq}}$  est  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -complet si  $\pi[X] \in \mathcal{F}_2$  pour toute projection  $\pi: M^{k+n} \rightarrow M^n$  et tout ensemble  $X \in \mathfrak{P}(C \times M^n) \cap \mathcal{F}_1$  qui est  $E$ -saturé.
- (c)  $H \leq G$  est un sous-groupe  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -parabolique si  $G/H$  est  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -complet.

Si  $\mathcal{F}_i$  est donné par les ensembles fermés d'une topologie  $\tau_i$ , je remplacerai  $\mathcal{F}_i$  par  $\tau_i$  dans la définition. Si  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ , j'omettrai l'un des deux.

Quelques exemples : toute structure  $\mathfrak{M}$  est complète pour la famille de tous les ensembles définissables, et aussi pour la famille des fermés triviaux. Un module est complet pour la famille des ensembles pp-définissables. Une variété abélienne est complète pour la topologie de Zariski.

La  $\mathcal{F}$ -complétude est une version forte d'élimination des quantificateurs à des ensembles dans  $\mathcal{F}$  près.

#### 3.1 General Nonsense

##### Proposition 3.2

- (a) Toute partie dans  $\mathcal{F}_1$  d'un ensemble  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -complet est aussi  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -complet.
- (b) Si  $A$  est  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_3$ -complete,  $f$  un  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -morphisme, alors  $f[A]$  est  $\mathcal{F}_2$ - $\mathcal{F}_3$ -complet.
- (c) Si  $A$  est  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -complet,  $f$  un  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_3$ -morphisme et  $\Delta$  est dans  $\mathcal{F}_3$ , alors  $f[A]$  est dans  $\mathcal{F}_2$ .
- (d) Si  $A$  est  $\mathcal{F}_1$ - $\mathcal{F}_2$ -complet et  $B$  est  $\mathcal{F}_2$ - $\mathcal{F}_3$ -complet, alors  $A \times B$  est  $\mathcal{F}_2$ - $\mathcal{F}_3$ -complet.

□ (a), (b) et (d) sont directs ; pour (c) il faut voir que  $f[A]$  est le projeté de  $\Gamma_f \cap (A \times M)$  et  $\Gamma_f = f^{-1}[\Delta] \in \mathcal{F}_3$ . □

En particulier, les ensembles  $\tau$ -complets sont ceux dont toute image sous un  $\tau$ -morphisme (en particulier l'identité) est fermé. La famille des  $\tau$ -complets est clos par sous-ensemble fermé et produit cartésien fini.

En copiant les preuves de [J2], on en obtient les résultats suivants :

##### Proposition 3.3

- (a) Si  $H_1 \leq H_2 \leq H_3$ , alors  $H_3/H_1$  est  $\tau$ -complet ssi  $H_3/H_2$  et  $H_2/H_1$  sont  $\tau$ -complets.
- (b)  $G$  contient toujours des sous-groupes paraboliques minimaux. Les sous-groupes paraboliques minimaux sont connexes et n'ont pas de sous-groupe parabolique propre.

#### .. pour les groupes de rang de Morley fini

Soit maintenant  $(\mathfrak{G}, \tau)$  un groupe topologisé tel que tous les termes soient des morphismes, et  $\aleph_0$ -stable de rang fini et connexe.

##### Proposition 3.4

- (a) Si  $C \subseteq G$  est  $\tau$ -complet et  $e \in C$ , alors le sous-groupe et le sous-groupe normal engendré par  $C$  sont  $\tau$ -complets.
- (b)  $G$  contient un sous-groupe connexe  $\tau$ -complet maximal  $G^{c\tau}$ , il est normal et  $G/G^{c\tau}$  ne contient pas de partie infinie  $\tau$ -complète.
- (c)  $G^{c\tau} \subseteq \mathbb{Z}(G)$ .
- (d) Si  $G^{c\tau} = \{e\}$  et  $P \leq G$  est  $\tau$ -parabolique, alors  $\mathbb{Z}(P) = \mathbb{Z}(G)$ .

□ Toujours les mêmes preuves que dans [J2] :

(a) Le sous-groupe normal engendré par  $C$  est de la forme  $C^{g_1} \dots C^{g_n} = \bar{\mu}[C^{g_1} \times \dots \times C^{g_n}]$  d'après le théorème des indécomposables de Zil'ber, donc complet, et le sous-groupe engendré par  $C$  en est une partie fermée.

(b) De la même façon, le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes complet est complet, et « complet-par-complet » est complet.

(c) voir 3.7 pour une version légèrement plus générale.

(d) Pour  $c \in \mathbb{Z}(P)$ , le morphisme  $\gamma_c : x \mapsto [x, c]$  factorise par  $\bar{\gamma}_c : G/P \rightarrow G$ . L'image  $\bar{\gamma}_c[G/P]$  est complet et fini, donc réduit à l'identité, ce qui veut dire que  $c \in \mathbb{Z}(G)$ . □

## 3.2 Concrete Nonsense

### 3.2.1 Sroure-complétude

**Lemme 3.5** *Aucune structure  $\mathfrak{M}$  n'est  $\text{Aut}^{\text{df}}$ -complète.*

□ L'ensemble  $\{(x, a) \mid x \neq a\} \subseteq M^2$  est un fermé de Sroure, mais pour  $a \notin \text{acl}(\emptyset)$ , le projeté  $\{x \mid x \neq a\} \subseteq M$  ne l'est pas. □

Une structure quelconque est même très loin d'être complète pour la topologie de Sroure dans le sens que tout ensemble définissable est l'image d'un fermé de Sroure par une projection. Car un ensemble définissable  $X = \varphi(M, \bar{a}) \subseteq M^m$  est la  $\bar{a}$ -fibre du fermé de Sroure  $X = \varphi(M) \subseteq M^{m+n}$ , et donc l'image du fermé  $X \times \{\bar{a}\} \subseteq M^{m+n}$  par la projection  $M^{m+n} \rightarrow M^m$ .

Cela implique que  $\mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{pr}}$ , la famille des fermés de Sroure dont tous les images par projection sont encore fermés, est strictement plus petite que  $\mathcal{F}(\text{Aut})$ . Elle contient les ensembles  $\text{acl}^{\text{eq}}(\emptyset)$ -définissables et les fermés triviaux, donc elle n'est pas close par intersections (considérer  $x \neq y$  et  $x = a \wedge y = y$ ). On voit facilement que  $\mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{f}}$  et  $\mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{pr}}$  sont incomparable, et que  $\mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{f pr}} = \mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{pr f}}$ .

La complétude est essentielle dans la théorie des groupe algébriques, et on peut espérer de retrouver beaucoup de ses propriétés dans les groupes de rang de Morley fini si l'on arrive à trouver une bonne notion de complétude. Je vois essentiellement deux possibilités :

- Trouver une sous-topologie de celle de Sroure pour laquelle les groupes algébriques au moins (sinon tous les groupes de rang de Morley fini) sont complets. Le premier candidat serait  $\tau(\text{Hol}_\bullet)$ .
- Travailler avec une notion faible de complétude, par exemple la  $\mathcal{V}$ -Aut-complétude. Un problème (parmi d'autres) : elle ne s'étend pas naturellement aux ensembles quelconques.

Pour simplifier, j'écrirai par la suite  $\text{Hol}$  au lieu de  $\text{Hol}_\bullet^{\text{df}}$ .

### Exemple 3.6

- (a) Soit  $T$  une théorie de relations d'équivalence avec élimination des quantificateurs :  $\mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{f}}$  est la famille des ensembles positivement définis ;  $\mathfrak{M}$  est  $\mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{f}}$ -complète. De plus, si  $\mathfrak{M}$  est  $\aleph_0$ -stable, alors  $\mathcal{F}(\text{Aut})^{\text{f}}$  en fait une géométrie de Zariski.
- (b) Soit  $\mathfrak{G}$  un groupe monobasé. Alors  $\mathcal{F}(\text{Hol})$  et la famille des ensembles pp-définissables, et  $\mathfrak{G}$  est  $\text{Hol}$ -complet. De plus, si  $\mathfrak{G}$  est  $\aleph_0$ -stable, alors  $\tau(\text{Hol})$  en fait une géométrie de Zariski.

Remarque : un groupe est  $\text{Hol}$ -Aut-complet ssi il est  $\text{Hol}$ -complet.

### 3.2.2 $\mathcal{V}$ -Aut-complétude

**Théorème 3.7 (Lascar)** *Supposons que  $\mathfrak{G}$  est un groupe  $\aleph_0$ -stable de rang de Morley fini et  $\mathcal{V}$ -Aut-complet. Alors  $\mathfrak{G}$  est abélien.*

□ Fait : il existe  $n \in \omega$  tel que  $G' = \{[h_1, g_1] \cdots [h_n, g_n] \mid h_i \in G\}$  pour tout générique  $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ .

Preuve du fait : pour toute suite  $(g_i)_{i \in \omega}$  d'éléments génériques indépendants, il existe  $m$  tel que  $G' = [G, g_1] \cdots [G, g_m]$  par le théorème des indécomposables de Zil'ber, et on obtient une borne sur ces  $m$  par compacité.

Supposons alors  $G$  non commutative et soit  $1 \neq a \in G'$ . Considérons la formule  $\psi(\bar{x}) := \exists \bar{y} [y_1, g_1 x_1] \cdots [y_n, g_n x_n] = a$ . Soit  $G^* \succ G$  une extension saturée, et  $\bar{g} := (g_1, \dots, g_n) \in (G^*)^n$  générique au-dessus de  $G$ . Alors tout  $\bar{g} \cdot \bar{h}$  avec  $\bar{h} \in G^n$  est générique au-dessus de  $G$ , d'où  $G^n \subseteq \psi(G^*)$ . Mais  $(g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}) \notin \psi(G^*)$  : alors  $\psi$  ne définit pas un fermé de Srour (voir p.ex. [JL] section 4.1) en contradiction avec l'hypothèse de complétude. □

La même preuve montre que :

**Corollaire 3.8** *Un groupe de rang de Morley fini, localement noetherien et Hol-complet est abélien.*

Remarque : les variétés abéliennes sont des exemples de groupes  $\mathcal{V}$ -Aut-complets. Les seuls exemples de groupes Hol-complet sont les modules dont on sait déjà qu'ils sont abélien !

**Proposition 3.9** *Soit  $\mathfrak{G}$  stable.*

- (a) *Si  $\mathfrak{G}$  est  $\mathcal{V}$ -Aut-complet, alors  $\mathfrak{G}$  satisfait à la propriété de Poizat.*
- (b) *Si  $\mathfrak{G}$  est Hol-complet et génériquement d'exposant  $n$ , alors  $\mathfrak{G}$  est d'exposant  $n$ .*

□ (b) Soit  $g$  générique au-dessus de  $\mathfrak{G}_0 \prec \mathfrak{G}$ . On sait (2.22) que  $x^4 = e \wedge x = gy$  définit un  $\text{Hol}_2$ -fermé. Donc par complétude,  $\exists x(x^4 = e \wedge x = gy)$  définit un fermé de Srour, qui contient  $G_0$ , donc tout  $G$ .

(a) est le même raisonnement avec un terme quelconque. □

**Question 4 (Une sorte de théorème de Rosenlicht)**

*Supposons que  $G/\mathbb{Z}(G)$  est  $\mathcal{V}$ -Aut-complet. Est-ce qu'alors  $G$  est abélien ?*

### 3.3 Construire des sous-groupes Hol-paraboliques

Soit  $K$  un corps algébriquement clos. Considérons la preuve suivante de la complétude de Zariski de  $\mathbb{P}(K)$  :

La surjection canonique  $p : K^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}(K)$  est continue où  $K^2 \setminus \{(0, 0)\}$  porte la topologie induite. Soit  $V \subseteq \mathbb{P}(K) \times K^n$  une variété et  $\pi : \mathbb{P}(K) \times K^n \rightarrow K^n$  la projection. Le cône affine  $C(V)$  de  $V$  est la clôture de Zariski de  $\tilde{V} := (p \times \text{id}_{K^n})^{-1}[V]$  dans  $K^{2+n}$ . C'est une partie irréductible de  $(K^2 \times \pi[C]) \cup (\{(0, 0)\} \times K^n)$ , et c'est une réunion de lignes droites moins un point sur chacune. Tous ces points sont donc dans la clôture, d'où  $C(V) \supseteq (K^2 \times \pi[C])$ . Mais par semi-continuité de la dimension,  $C(V)$  ne peut pas avoir autre points sur la ligne  $\{(0, 0)\} \times K^n$ . Par conséquent  $C(V) = K^2 \times \pi[C]$  et  $\pi[C]$  est fermé.

La preuve repose sur deux fait essentiels :  $K^n$  est couvert par une famille uniformément définissable dont les membres se coupent deux-à-deux dans une petite partie ; et la dimension est semi-continue.

La première condition est satisfaite dans un mauvais groupe par les conjugués d'un Borel (voir [P] théorème 3.31) : Si  $G$  est un groupe simple,  $\aleph_0$ -stable de rang de Morley fini, alors tous les Borels sont conjugués et autonormalisant, et deux Borels distincts se coupent en l'identité.

Soit  $G^* := G \setminus \{e\}$ . Supposons qu'un Borel  $B$  est  $\emptyset$ -définissable (en ajoutant  $\text{cb}(B)$  au langage). Définissons une relation d'équivalence  $\sim_B$  sur  $G$  :

$$x \sim_B y \iff \begin{cases} x = y = e & \text{ou} \\ x, y \neq e & \text{et il existe } g \in G \text{ tel que } x \in B^g \text{ et } y \in B^g \end{cases}$$

Soit  $p = p_B : G \rightarrow G/\sim_B$  la surjection naturelle et  $\mathbb{P}(B)$  l'ensemble d'imaginaires  $G^*/\sim_B$ . Une partie  $X \subseteq \mathbb{P}(B) \times G^n$  est  $\tau$ -fermé s'il existe un  $\tau$ -fermé  $Y \subseteq G^{n+1}$  tel que  $p_{[n]}^{-1}[X] = Y \cap (G^* \times G^n)$ . (Donc  $\mathbb{P}(B)$  porte la topologie quotient de la topologie induite sur  $G^*$ , qui dans ce cas est égale à la topologie induite sur  $\mathbb{P}(B)$  par la topologie quotient sur  $G/\sim_B$  parce que la classe manquante n'a qu'un élément – c'est faux en général!)

**Proposition 3.10** *Supposons que la condition suivante est satisfaite (une version faible de la semi-continuité de la dimension) :*

*Si  $\pi : G^{n+1} \rightarrow G^n$  est une projection et  $X \subseteq G^{n+1}$  un ensemble sans  $\pi$ -fibres finies, alors la Hol-adhérence de  $X$  n'a pas de  $\pi$ -fibre finie.*

Alors  $\mathbb{P}(B)$  est Hol-complet.

□ C'est exactement la même preuve que pour l'espace projectif :

Soit  $V \subseteq \mathbb{P}(B) \times G^n$  un ensemble définissable et Hol-fermé,  $\pi$  la projection sur  $G^n$  et  $\tilde{V} := p_{[n]}^{-1}[V]$ .

Par définition,  $\tilde{V} = W \cap (G^* \times G^n)$  pour la Hol-adhérence  $W$  de  $\tilde{V}$ . Alors

$$\tilde{V} \cup (\{e\} \times \pi[V]) \subseteq W \subseteq \tilde{V} \cup (\{e\} \times G^n)$$

La première inclusion vient du fait qu'une partie cofinie d'un sous-groupe définissable infini  $X$  n'est pas Hol-fermé : un point manquant peut être translaté sur un point  $y \notin \text{acl}(\text{cb}(X))$  et puis on peut appliquer le lemme 3.26 de [JL].

Avec l'hypothèse de semi-continuité faible on en déduit  $W = \tilde{V} \cup (\{e\} \times G^n)$ . Par conséquent,  $\pi[V] = {}_eW$  est un Hol-fermé. □

On peut bien sûr remplacer la Hol-topologie par n'importe quelle topologie fibreuse qui satisfait la propriété de semi-continuité faible et la propriété qu'une partie cofinie propre d'un sous-groupe définissable infini n'est pas fermé.

$G$  agit transitivement sur  $\mathbb{P}(B)$ , le stabilisateur est  $N_G(B)$ . Puisque  $B$  est autonormalisant dans notre cas, on obtient une bijection  $\emptyset$ -définissable et  $G$ -équivariant  $\beta : G/B \rightarrow \mathbb{P}(B)$ . C'est donc un Aut-homéomorphisme.

### Question 5

- (a) *Est  $\beta$  aussi un Hol-homéomorphisme ? Sous des condition raisonnables ? Dans les groupes algébriques ?*
- (b) *Est-ce que l'hypothèse de semi-continuité est satisfaite ? Sous des condition raisonnables ? Dans les groupes algébriques ?*

Dans les groupes algébriques et pour la topologie de Zariski, la même situation implique que  $G/B$  est complet (voir [Hu] lemma 21.1), mais la preuve repose sur des techniques de géométrie algébrique qui ne peuvent pas être copiées facilement. Dans le contexte d'une géométrie de Zariski, une condition de régularité (ou lissité) permet de montrer que  $\beta$  est un homéomorphisme (voir [J1] 3.55 et 5.45). La traduction immédiate de cette lissité pour la topologie de Srou ou la Hol-topologie est fausse, même dans les corps algébriquement clos, mais une autre condition moins stricte pourrait faire l'affaire.

Deux autres possibilités de procéder :

- chercher une topologie moins fine ;
- analyser soigneusement la preuve et essayer de l'améliorer.

## Références

- [Br] R. Bryant, Groups with minimal condition on centralizers, *J. Algebra* **60** (1979) pp.371–383.
- [Hu] J. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer New York 1981.
- [Ja] Kh. Jaber, Équations génériques dans un groupe stable nilpotent. *JSL* **64** (1999), no. 2, pp. 761–768.
- [J1] M. Junker, *Géométries de zariski et Groupes de Zariski*, thèse de doctorat, Université Patis 7, juillet 1996.
- [J2] M. Junker, Completeness in Zariski Groups, *Israel Journal of Mathematics* **109** (1999), pp. 273–298.
- [JL] M. Junker, D. Lascar, The indiscernible topology : a mock Zariski topology, 1999, soumis au JML.
- [P] B. Poizat, *Groupes stables*, Nur al-Mantiq wal Ma'rifah, Lyon 1987.
- [PS] A. Pillay, G. Srouf, Closed sets and chain conditions in stable theories, *JSL* **49** No. 4 (1984) pp. 1350-1362.
- [W] B. Wehrfritz, *Infinite Linear Groups*, Springer Berlin 1973.